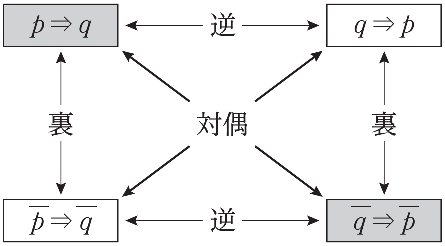
第 6 講　命題と論証

PART1　逆・裏・対偶

要点① 命題の逆・裏・対偶



命題 $p \Rightarrow q$ に対して

$q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の「　　」

$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ を $p \Rightarrow q$ の「　　」

$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ を $p \Rightarrow q$ の「　　　」

という。

例　x を実数とするとき，命題「$x=1 \Rightarrow x^2=1$」の

逆は　「　　　$\Rightarrow$　　　」

裏は　「　　　$\Rightarrow$　　　」

対偶は「　　　$\Rightarrow$　　　」

命題「$x=1 \Rightarrow x^2=1$」は真であるが，その逆「$x^2=1 \Rightarrow x=1$」は偽（反例：$x=-1$）である。一般的に，次のことがいえる。

> 命題が真であっても，その命題の逆は真とは限らない。

要点② 命題と対偶の真偽

全体集合 U の要素の中で条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とすると

命題「$p \Rightarrow q$」が真　$\Leftrightarrow$　$P \subset Q$

対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」が真　$\Leftrightarrow$　$\overline{Q} \subset \overline{P}$

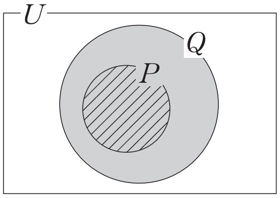
である。右図より

$P \subset Q$　$\Leftrightarrow$　$\overline{Q} \subset \overline{P}$

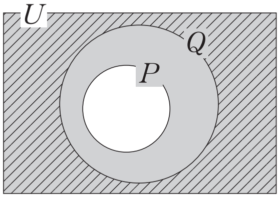
であるから，命題「$p \Rightarrow q$」が真であることは，

その対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」が真であることと同じである。

よって，次のことがいえる。



▨:P　■:Q



▨:$\overline{Q}$　■:$\overline{P}$

命題と対偶の真偽

命題「$p \Rightarrow q$」とその対偶「$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$」の真偽は一致する。

よって，命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を判定するとき，その対偶 $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ の真偽の判定をすることで，もとの命題の真偽を判定することができる。

例 命題「$x+y<0 \;\Rightarrow\; x<0$ または $y<0$」の真偽について

この命題の対偶は「x 　　　　y 　　$\Rightarrow x+y$ 　　」

これは明らかに　　である。よって，もとの命題も　　である。

命題「$p \Rightarrow q$」の逆「$q \Rightarrow p$」と裏「$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$」は対偶の関係にあるから，逆と裏の真偽も一致する。

1 n は整数，x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

(1) n が 2 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。

(2) $x \neq 1$ ならば $x^2-4x+3 \neq 0$ である。

Point Pickup

逆・裏・対偶

命題 $p \Rightarrow q$ の

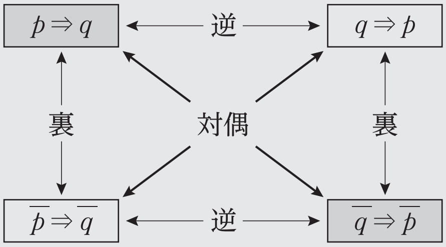
逆　$q \Rightarrow p$

裏　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

対偶　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$

命題とその対偶の真偽は一致する。

また，逆と裏の真偽は一致する。



第 6 講　PART1 確認問題

1　n を整数として，次の命題を P とする。

「n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数である」

命題 P の逆・裏・対偶をそれぞれ述べよ。また，命題 P および逆・裏・対偶の真偽を調べよ。

		真偽
P	n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数である	エ
P の逆	ア	オ
P の裏	イ	カ
P の対偶	ウ	キ

[ア ～ ウ の選択肢]

① n が 3 の倍数ならば，n は 6 の倍数である

② n が 6 の倍数ならば，n は 3 の倍数でない

③ n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数でない

④ n が 6 の倍数でないならば，n は 3 の倍数でない

[エ ～ キ の選択肢]

① 真　　② 偽

2 x を実数として，次の命題を P とする。

「$x \neq 1$ ならば，$x^2 \neq x$ である」

命題 P の逆・裏・対偶をそれぞれ述べよ。また，

命題 P および逆・裏・対偶の真偽を調べよ。

		真偽
P	$x \neq 1$ ならば， $x^2 \neq x$ である	サ
P の逆	ク	シ
P の裏	ケ	ス
P の対偶	コ	セ

[ク ～ コ の選択肢]

① $x = 1$ ならば，$x^2 \neq x$ である

② $x = 1$ ならば，$x^2 = x$ である

③ $x^2 = x$ ならば，$x = 1$ である

④ $x^2 \neq x$ ならば，$x \neq 1$ である

[サ ～ セ の選択肢]

① 真　　② 偽

[MEMO]

第 6 講　命題と論証

PART1 逆・裏・対偶

1 n は整数，x は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また，逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

(1) n が 2 の倍数ならば，n は 4 の倍数である。

(2) $x \neq 1$ ならば $x^2-4x+3 \neq 0$ である。

[解答]

(1) 命題は偽である。(反例：$n=6$)

逆：n が 4 の倍数ならば，n は 2 の倍数である。

裏：n が 2 の倍数でないならば，n は 4 の倍数でない。

対偶：n が 4 の倍数でないならば，n は 2 の倍数でない。

もとの命題が偽より，対偶も偽

逆は真

よって，裏も真

(2) 逆：$x^2-4x+3 \neq 0$ ならば $x \neq 1$ である。

裏：$x=1$ ならば $x^2-4x+3=0$ である。

対偶：$x^2-4x+3=0$ ならば $x=1$ である。

$x^2-4x+3=0$ より $(x-3)(x-1)=0$　$x=3$，1

よって，対偶は偽(反例：$x=3$)

対偶が偽より，もとの命題も偽(反例：$x=3$)

裏は真

裏が真より，逆も真

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：④，ウ：③，エ：①，オ：②，
カ：②，キ：①

[解説]

命題 P は**真**である。

逆：**n が 3 の倍数ならば，n は 6 の倍数である** [A]

これは，**偽**である。（反例：$n=9$）

裏：**n が 6 の倍数でないならば，n は 3 の倍数でない**

逆が偽だから，裏も**偽**である。

対偶：**n が 3 の倍数でないならば，n は 6 の倍数でない**

P が真だから，対偶も**真**である。

> [A]　逆・裏・対偶
> 命題 $p \Rightarrow q$ の
> 逆　$q \Rightarrow p$
> 裏　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
> 対偶　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
> 命題とその対偶の真偽は一致する。また，逆と裏の真偽は一致する。

2

[正解] ク：④，ケ：②，コ：③，サ：②，シ：①，
ス：①，セ：②

[解説]

逆：**$x^2 \neq x$ ならば，$x \neq 1$ である**

これは，**真**である。 [B]

裏：**$x=1$ ならば，$x^2=x$ である**

これは，**真**である。

対偶：**$x^2=x$ ならば，$x=1$ である**

これは**偽**である。（反例：$x=0$）

対偶は偽だから，命題 P は偽である。

> [B]　逆・裏・対偶
> 命題 $p \Rightarrow q$ の
> 逆　$q \Rightarrow p$
> 裏　$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$
> 対偶　$\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$
> 命題とその対偶の真偽は一致する。また，逆と裏の真偽は一致する。